





## Coordinación de Principios de Teorías de la Educación Matemática para el logro del Razonamiento Cuantitativo

Coordination of Principles of Theories of Mathematical Education for the achievement of Quantitative Reasoning

 **Zenón Morales-Martínez**  
Universidad Nacional Federico Villarreal

 **Gamaniel Domingo Gonzales Salvador**  
Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle

 **Narcio Felimon Vilcapoma Lara**  
Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle

### RESUMEN

La investigación tiene como objetivo determinar si existe una relación significativa entre la coordinación de los principios de la Teoría de la Educación Matemática Realista, EMR y de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, TRRS y el logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo. La investigación corresponde a un estudio correlacional y tiene un diseño no experimental. Los participantes del estudio son docentes que participan en una maestría de una universidad pública. A ellos se les aplicó una entrevista estructurada con enfoque cualitativo para recoger información sobre sus conocimientos sobre la EMR y sobre la TRRS, además se les aplicó un cuestionario que es analizado con un enfoque cuantitativo para determinar la comprobación de las hipótesis de la investigación. Investigamos cómo los principios de cada teoría de la Educación Matemática permiten lograr aprendizajes realistas y semióticos, que permitan a los alumnos atribuirles un significado realista a sus aprendizajes y que los conceptos abstractos adquieran realidad a través de una representación semiótica que les permita realizar la actividad matemática. En forma cualitativa se concluye que los participantes logran integrar la Metáfora del Iceberg y aplican la fenomenología didáctica de la EMR en su práctica educativa; así también integran los registros semióticos y de transformaciones como el tratamiento y la conversión de la TRRS a su actividad matemática; y en forma cuantitativa se comprueba a través de la prueba de Chi-cuadrado que existe una relación significativa entre las variables de estudio para un nivel de confianza del 95%.

**Palabras clave:** Coordinación de teorías, Educación Matemática Realista, Teoría de Registros de la Representación Semiótica, Razonamiento Cuantitativo.

## ABSTRACT

The research aims to determine if there is a significant relationship between the coordination of the principles of the Theory of Realistic Mathematics Education, EMR and the Theory of Semiotic Representation Records, TRRS, and the achievement of the Quantitative Reasoning dimensions. The research corresponds to a correlational study and has a non-experimental design. The study participants are teachers who participate in a master's degree at a public university. A structured interview with a qualitative approach was applied to them to collect information on their knowledge about EMR and TRRS, in addition a questionnaire was applied to them that is analyzed with a quantitative approach to determine the verification of the research hypotheses. We investigate how the principles of each theory of Mathematics Education allow to achieve realistic and semiotic learning, which allow students to attribute a realistic meaning to their learning and that abstract concepts acquire reality through a semiotic representation that allows them to carry out the mathematical activity. . In a qualitative way, it is concluded that the participants manage to integrate the Iceberg Metaphor and apply the didactic phenomenology of the EMR in their educational practice; thus, they also integrate the semiotic and transformation registers such as the treatment and conversion of the TRRS to its mathematical activity; and quantitatively, it is verified through the Chi-square test that there is a significant relationship between the study variables for a confidence level of 95%.

**Keywords:** Coordination of theories, Realistic Mathematical Education, Theory of Registers of Semiotic Representation, Quantitative Reasoning.

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 Planteamiento del Problema

La complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha permitido que distintos investigadores hagan sendas miradas reflexivas sobre esta complejidad, creando diversas teorías locales sobre “el contenido matemático, el aprendizaje de los alumnos, el entorno social, la organización de la clase, el uso de determinados recursos materiales” (Font, 2013, p. 1).

En esta investigación abordaremos un análisis de los problemas del aprendizaje de las matemáticas desde un enfoque cognitivo de la Teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) propuesta por el Freudenthal (1973) “que ha sido desarrollada

en un número de teorías de instrucción local para diferentes temas matemáticos, edades de los estudiantes y niveles de rendimiento” (Drijvers, 2020b, p. 3) y que nos permitirá que los alumnos a través de la “fenomenología didáctica” de esta teoría logren transformar “objetos no realistas” en “objetos realistas” que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas. Este “marco realista”, se coordinará con el “marco semiótico” de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2011), que propone que “lo que importa no es la representación, sino su transformación. A diferencia de las otras áreas de conocimiento científico, los signos y la transformación de la representación semiótica se encuentran en el corazón de la actividad matemática”. (p. 3), aquí



una primera coincidencia entre ambos: la actividad matemática que realiza el alumno construyendo objetos “realistas” apoyándose en la representación de registros semióticos.

Esta investigación se realiza en el contexto educativo de la nueva normalidad producido por la pandemia del Covid-19 que enfrenta nuestro país y el mundo, se fortalece en la experiencia en aulas por parte del autor y su participación en diversos congresos internacionales de educación matemática entre ellos en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), en el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), en el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM), en el International Congress on Mathematical Education (ICME), en las Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM), entre otros.

Es así que encontramos que los alumnos presentan un deficiente desarrollo de las tareas de matemáticas y escasa participación en la clase de matemáticas, esto se hace evidente cuando el docente está realizando una clase virtual, de 40 alumnos conectados a la sesión, apenas unos 10 alumnos participan en forma activa.

Y cuando se les evalúa en forma sumativa y las notas son relativamente bajas, opinan: “Profesor, no entiendo matemáticas”.

Con este enfoque cognitivo que nos permiten estas dos teorías EMR y TRRS, encontraremos que hay objetos matemáticos que no pueden ser manipulados en las actividades que permiten la resolución de problemas porque aún no son realistas para el alumno o no logran hacer uso de

los registros semióticos para lograr la “realidad” de estos objetos que les permitan el éxito en el aprendizaje de las matemáticas.

## 1.2 Descripción del Problema

Según el Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, IREM-PUCP, (2021) que presenta tres Líneas de Investigación, nuestra investigación corresponde a la Línea 3 que trata sobre el “Desarrollo de la competencia didáctico matemático en profesores de matemática”, porque estamos interesados en desarrollar investigaciones centradas en los conocimientos didáctico matemáticos de un profesor para el desarrollo de un tópico específico, así como el diseño y análisis de organizaciones didácticas para la enseñanza de un determinado tópico. (IREM-PUCP, 2021)

Así mismo en consulta al documento que presenta las Líneas de Investigación de la Universidad Nacional Federico Villarreal, UNFV, (2021), se propone que “las líneas son multidisciplinarias, transversales y están orientadas a solucionar los principales problemas sociales, científicos y tecnológicos de nuestra sociedad”

En esta investigación mostraremos que los maestros disponen de esos conocimientos didáctico matemáticos (IREM-PUCP, 2021) a través de estas teorías EMR y TRRS para enfrentar la complejidad de aprender matemática, donde estas teorías que emergen de la investigación interdisciplinaria de los procesos educativos (UNFV, 2021), se reúnen en esta investigación para una actuación sinérgica que llamamos “coordinación de teorías” o “el problema de comparación y articulación de teorías”

(Font, 2013), para formar alumnos realistas-semióticos que aprendan matemáticas.

### 1.3 Formulación del Problema

De acuerdo al planteamiento del problema, las preguntas de investigación en el presente trabajo son:

**PG 1:** ¿Es posible integrar los principios de la EMR y de la TRRS a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática en el nivel escolar?

**PG 2:** ¿Existe relación significativa entre la coordinación entre los principios de las principales Teorías de la Educación Matemática y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar?

### 1.4 Algunas Investigaciones Anteriores sobre la EMR

Gallart (2016) analiza la competencia matemática como la capacidad de los alumnos de matematizar problemas de la vida real, investigando si el trabajo basado en las tareas de modelización repercute positivamente en el desarrollo de competencias necesarias para resolver problemas reales y concluyendo que en el proceso de matematización, los alumnos hacen uso de distintos tipos de representaciones que permiten la codificación en el mundo de las matemáticas de los elementos seleccionados en la realidad, siendo esta codificación fundamental para resolver con éxito el problema matemático. (pp. 5,121). Esta investigación aplica el enfoque realista dado que utiliza modelos de la realidad y el enfoque semiótico porque utiliza distintas representaciones,

ambos enfoques para el éxito en el aprendizaje de las matemáticas.

Salgado (2015), investiga qué matemáticas se enseñan (los contenidos) y que se está haciendo “matemáticamente” (los procesos) en las aulas de Educación Inicial, destacando la necesidad de contextos “reales” que permitan una construcción significativa del conocimiento matemático en los niños 4 a 6 años. A través de los resultados de un estudio cuasi-experimental con el uso de modelos como uno en particular denominado “saborea las mates... con una tableta de chocolate” concluyen que los resultados alcanzados son bajos por el nivel de maduración mental de los niños, porque sus objetos “realistas” en el campo matemático son limitados, dejando una interrogante para investigaciones futuras: ¿qué contextos específicos de otras áreas pueden ser idóneos para el proceso de “matematización” en la Educación Inicial?.

Nuestra investigación a través del principio de realidad de la EMR puede determinar contextos reales propicios para esta edad infantil y los registros figurales de la TRRS apoyar en el logro de “nuevas realidades” para el infante.

### 1.5 Algunas Investigaciones Anteriores sobre la TRRS

Nuestra investigación empleará la contribución de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), cuyas iniciales son TRRS quien nos propone las “ideas claves para el análisis cognitivo de los problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas” (Duval, 2005), siendo este un enfoque cognitivo, al igual que la EMR, nos propone que para “aliviar” las dificultades de este proceso complejo como es el

aprendizaje de las matemáticas, se debe recurrir primero a la representación de los objetos matemáticos para luego realizar las transformaciones necesarias que permitan lograr la resolución de los problemas matemáticos.

Una gran cantidad de investigadores en el mundo hacen uso de esta teoría para el estudio de las dificultades en los aprendizajes de las matemáticas, en los distintos niveles educativos y en las distintas localidades del mundo matemático. Presentamos algunas investigaciones realizadas con esta teoría, sus objetivos y a qué hallazgos llegaron, que serán tomados en cuenta en nuestra investigación.

Macías (2016) investiga los problemas que tienen los alumnos, partiendo de esta interrogante, ¿qué hay detrás de los errores y dificultades que tienen los alumnos cuando estudian Matemáticas?, señalando algo muy importante que respalda nuestra investigación: existen “trabajos e investigaciones en didáctica que han evidenciado la importancia que tienen las representaciones y los cambios de un registro de representación semiótico a otro, en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas” (p. 8), las principales conclusiones de esta investigación señalan que “toda actividad y proceso matemático lleva consigo la necesidad de cambiar de registro semiótico, motivo por el cual aparecen algunas representaciones implícitas en los contenidos” (p. 1032).

### 1.6 Antecedentes sobre la Coordinación de Teorías de la Educación Matemática

Font (2013), nos plantea que, debido a la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, esto nos conlleva a “la diversidad de problemas a los que se enfrenta

en la actualidad la enseñanza de las matemáticas y los métodos a seguir para su estudio sistemático” (p. 2), ante esto han surgido diversos marcos teóricos, con distintos enfoques, constructivistas o socioculturales o enfoque mixtos.

Hacemos mención de las principales Teorías de Educación Matemática (TEM) empleadas en investigaciones como: la Teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema, APOE, (Dubinsky y McDonald, 2001); la Teoría de las Situaciones Didácticas, TSD, (Brousseau, 1997); la Teoría Antropológica de la Didáctica, TAD, (Chevallard, 1991); la Teoría de la Génesis Instrumental, TGI, (Rabardel, 1995); el Enfoque Onto-Semiótico, EOS, (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006); la Teoría de la Educación Matemática Realista, EMR, (Freudenthal, 1973); la Teoría de los Registros de Representación Semiótica, TRRS, (Duval, 1995, 2005, 2011); entre otras teorías.

Ante esta problemática, por la diversidad de las Teorías de la Educación Matemática “parece necesario abordar el problema de comparar, coordinar e integrar dichas teorías en un marco que incluya las herramientas necesarias y suficientes para hacer el trabajo requerido” (Font, 2013, p. 7).

Delimitamos nuestra investigación a dos teorías (T<sub>1</sub>=EMR; T<sub>2</sub>=TRRS) de esta larga lista ya existente, una elección no aleatoria de estas dos teorías, esperamos que otros investigadores participen en lo que llamaremos “Investigaciones sobre la Coordinación de Teorías de la Educación Matemática”, CoorTEM, que puede desarrollarse en la Línea de Investigación en Didáctica de las Matemáticas ya existente.

Prediger et al (2008), nos presentan algunas “estrategias para conectar teorías” (p. 4), que nos proponen ignorar algunas teorías para elegir otras, para lograr “grados de integración de las teorías mutuas” (p. 4).

Al comparar teorías, estas muestran sus similitudes y diferencias fuertes, “las similitudes son puntos para vincular y las diferencias fuertes pueden hacer que se hagan visibles las fortalezas individuales” (p. 4) de cada teoría. Es posible que todas las teorías pueden ser comparadas o contrastadas, “aunque es posible que esta coordinación de dos diferentes teorías pueda resultar difícil cuando estas no son compatibles” (p. 6).

### 1.7 Justificación en el Ámbito Nacional

Para una justificación en el ámbito nacional, tomamos en cuenta las competencias que rigen la educación escolar en nuestro país.

El Currículo Nacional de la Educación Básica del Minedu (2016), promueve que los aprendizajes de los estudiantes se “deben garantizar como Estado y Sociedad” (p. 7), propone en una de las “competencias, capacidades y estándares de aprendizaje nacionales de la Educación Básica” (p. 8) a la Competencia 20, que permitirá lograr que los estudiantes de nuestro país, “indaguen mediante métodos científicos para construir sus conocimientos” (p. 9). Esperamos con nuestra investigación mostrar que el aporte de las TEM, de manera específica la EMR y la TRRS, permitan al estudiante la construcción de conocimientos matemáticos con una mirada hacia la actividad matemática basada en los “objetos realistas” logrados con el apoyo de los registros que surgen

de las representaciones semióticas de Duval (1995).

### 1.8 Justificación en el Ámbito Internacional

Para una justificación en el ámbito internacional, tomamos en cuenta los 7 estándares que propone *National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM sobre la educación escolar en los Estados Unidos. La NCTM (2020) en su estándar 4 propone los profesores deben promover la “enseñanza de matemáticas significativas” a partir de determinados principios fundamentales, como establecer rigurosas metas de aprendizaje de matemáticas, que para lograrlo se deben “involucrar a los estudiantes en un aprendizaje de alta demanda cognitiva, usar herramientas y representaciones específicas de matemáticas”. Desde que iniciamos esta investigación planteamos la propuesta que coincide con la NCTM (2020) que “la enseñanza de las matemáticas es compleja”, por esto es necesario “la incorporación de prácticas de enseñanza eficaces” (p. 23) que esperamos lograr con los principios de la EMR (Freudenthal, 1973). En este estándar se menciona que las representaciones matemáticas permiten incorporar construcciones y acciones matemáticas, que Duval (1995) le llama transformaciones entre los registros semióticos. A

sí mismo, según NCTM (2020) la clasificación general de las representaciones matemáticas incluye a las “representaciones contextuales, visuales, verbales, físicas y simbólicas” (p. 31). Esta clasificación de las representaciones matemáticas es muy parecida a las representaciones semióticas de Duval (2005), como veremos más adelante.

### 1.9 Objetivos de la Investigación

**OG 1:** Comprobar la integración los principios de la EMR y de la TRRS en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática en el nivel escolar.

**OG 2:** Determinar si existe relación significativa entre la coordinación entre los principios de las Teorías EMR y TRRS y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

### 1.10 Implementación de la RME en el Mundo

Heuvel-Panhuizen (2019) en su obra nos describe sobre los alcances de la EMR en distintos países del mundo:

En Inglaterra, durante los últimos diez años se han realizado una serie de proyectos en el aula basados en la EMR en más de 40 escuelas, con 80 profesores y 2000 alumnos.

En Indonesia, se establecieron proyectos para una adaptación indonesia del enfoque RME para la enseñanza de las matemáticas.

En Argentina, la implementación de la EMR tiene un alto grado de implementación docente, agrupados en el Grupo Patagónico de Didáctica de las Matemáticas (GPDM). Se dedicaron a los procesos de diseño, ensayos, reflexión, logrando la reinención de la EMR.

En Puerto Rico, a través del uso de situaciones paradigmáticas, para encontrar formas de integrar los nuevos materiales en el currículo general y en la cultura puertorriqueña.

En los Estados Unidos, la puesta en práctica de la EMR considera crucial la participación activa de

los estudiantes en el proceso de aprendizaje y el diseño de materiales didácticos, se centra la atención en reconsiderar cómo los estudiantes aprenden matemáticas.

En Sudáfrica, los docentes son los actores principales para el desarrollo de teorías educativas locales, alineando el currículo operativo de matemática en la escuela.

En China, primero hubo mucho intercambio entre representantes de la EMR y profesores de matemáticas chinos a través de conferencias. Al inicio no se encuentra entre la conexión entre el nivel teórico y lo que ocurría en la práctica en el aula. Luego se enfatiza en la importancia de la orientación del maestro durante el proceso de matematización, esta idea fue rápidamente aceptada y apoyada por los chinos.

En Corea, se sugiere a los profesores de matemáticas se centren más en el pensamiento matemático que en el contenido matemático en sí mismo y tomando como guía la fenomenología didáctica de Freudenthal.

### 1.11 Los Principios Fundamentales de la EMR

Según Heuvel-Panhuizen (2014) la EMR se fundamenta en los principios principales:

**P1:** El Principio de Actividad: la matemática como una actividad humana. Freudenthal (1968) señala que lo que los humanos tienen que aprender son las matemáticas como una actividad, “el proceso de matematización de la realidad y si es posible incluso la matematización de las matemáticas” (p.7).

**P2:** El Principio de Realidad: empleo de la fenomenología didáctica para el logro de objetos

realistas para el logro de los aprendizajes de las matemáticas.

Estos objetos realistas provienen de dos fuentes: realidad cotidiana, que parte de situaciones del mundo real; y realidad mental, que parte de situaciones cognitivas que se hacen reales como producto del aprendizaje. Por ejemplo, debido al aprendizaje logrado del Teorema de Pitágoras, este teorema es un objeto real de tipo mental para el alumno y le permite aplicarlo como un objeto real en la construcción de otros aprendizajes. Este principio es clave para la EMR, porque no se trata de lo que las personas entienden como realista. Podemos señalar hasta cuatro conceptos de realidad:

- 1) Realista lo que está en la mente de los alumnos y es logrado por los aprendizajes; 2) Realista lo que está en el mundo real;
- 2) Realista lo que tiene sentido para los alumnos;
- 3) Realista de lo que el alumno puede darse cuenta o lo que puede ser consciente o puede imaginarse. (Drijvers, 2020a)

Cabe mencionar que cuando el profesor aplica fenomenología didáctica en sus sesiones de aprendizaje, éste “relaciona los objetos de pensamiento matemático con los fenómenos del mundo físico, social, mental, ... para informarnos cómo estos objetos de pensamiento matemático pueden ayudar a organizar y estructurar los fenómenos en la realidad” (Drijvers, 2020b, p. 9).

En resumen, el profesor hace comparaciones del mundo real con el mundo mental con una finalidad didáctica, es decir para lograr la realidad de un concepto abstracto.

## 1.12 La Fenomenología Didáctica de Freudenthal

De estos principios, nuestra investigación se centrará en el principio de realidad, porque: la visión realista [...] toma la realidad como punto de partida, es decir el mundo del niño, lo que implica que trata de identificar las apariciones de los fenómenos matemáticos que se ajustan al mundo del niño, de modo que el niño pueda atribuirle un significado. (Treffers, 1987, pp. 12-13)

Según Drijvers (2020b), nos propone la interrogante: ¿qué queremos decir con “Realista”? y nos responde que este término “Realista” en los contextos de la Educación Matemática puede tener diferentes significados:

- R1. Realista en el sentido de factible en nuestra práctica educativa. Lo que se hace real como resultado de los aprendizajes adquiridos.
- R2. Realista en el sentido de relacionado con la vida real (el mundo real, el mundo de la fantasía, el mundo de las matemáticas).
- R3. Realista en el sentido de lo que tiene significado para los estudiantes.
- R4. Realista en el sentido de darse cuenta, percibir, ser consciente de, imaginar; algo que el estudiante le da sentido en una realidad interior.

En nuestra investigación tomaremos las realidades R1 y R2, que tienen más significado en el proceso educativo de la EBR de nuestro país.

La fenomenología didáctica hace que la actividad docente se haga “realista” y relaciona los objetos del pensamiento matemático (el contenido matemático) con los fenómenos del mundo cotidiano (mundo físico, mundo social) con una



intención de lograr aprendizajes, es decir para informarnos cómo estos objetos del pensamiento matemático pueden ayudar a organizar y estructurar los fenómenos de la realidad. (Drijvers, 2020a). Estos fenómenos pueden originarse de la vida real o pueden ser “experimentalmente reales” o “realmente artificiales” (logran ser reales por el aprendizaje logrado).

Los fenómenos del mundo cotidiano, llegan en forma de modelos.

Estos modelos no son los modelos matemáticos creados en el proceso de modelación matemática.

### 1.13 Metáfora del Iceberg

Una metáfora es un tipo de analogía o comparación entre unidades que comparten alguna similitud de significado para sustituir a uno por el otro en una misma estructura.

Drijvers (2020a) nos ilustra esta actividad humana mediante la Metáfora del Iceberg, según se muestra en la figura 01, si lo queremos que el alumno aprenda que:  $5 + 2 = 7$ , esto es lo que se puede observar como un aprendizaje logrado, esto puede evaluarse, pero sólo es la parte superior del iceberg.

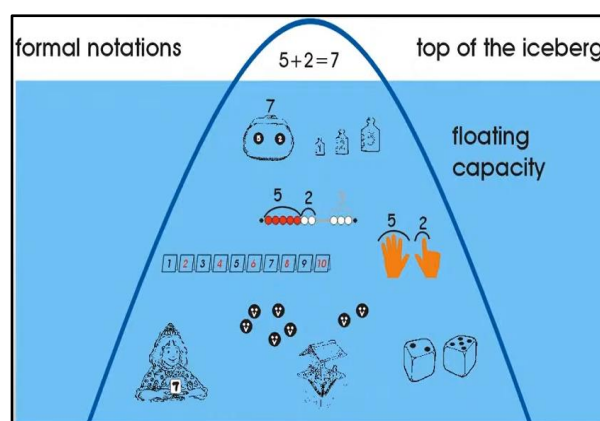
¿Cómo el alumno ha logrado este aprendizaje?,

Según el principio realista de la EMR, sabemos que la habilidad para realizar esta suma depende de los procesos previos y de los conocimientos previos de los alumnos, como a) tirar a los dados y sumar sus caras superiores, b) contar con los dedos para realizar sumas, c) usar ábacos para practicar sumas, d) usar las rectas numéricas para sumar números enteros; y todas estas experiencias son como los cimientos de la habilidad observable. Haciendo la comparación con el iceberg, sólo ves la parte

superior del iceberg sobre el nivel del agua (el top del iceberg), pero si quiero eliminar lo que hay debajo del nivel del mar, estaríamos eliminando las experiencias que son los cimientos de los procesos que sostienen el aprendizaje logrado, es decir si cortas la parte inferior del iceberg, se hundirá un poco, perdiéndose la habilidad del proceso.

**Figura 01**

*Metáfora del iceberg*



*Nota. Tomado de Drijvers (2020a)*

### 1.14 Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas, TRRS

Según la TRRS el éxito en el aprendizaje se verá reflejado cuando los alumnos logren las transformaciones adecuadas sobre el objeto matemático, según Duval (2005) “la manera matemática de razonar y visualizar está intrínsecamente ligada a la utilización de las representaciones semióticas, y toda comunicación en matemática se establece a través de esas representaciones” (p. 8).

Este enfoque cognitivo de la actividad matemática, permitirá al profesor entender, localizar y conocer la naturaleza de las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas.

### 1.15 Los Tipos de Registros de Representación Semiótica

Los cuatro registros semióticos de la TRRS son:

R1: Registro Literal o de Lengua Natural: este registro expresa en forma verbal, con palabras, el objeto matemático es presentado en forma de textual.

Duval (2006) nos plantea que el uso del lenguaje natural no se puede evitar y sabemos que está presente en todas las áreas del conocimiento.

R2: Registro Simbólico: este registro emplea números y símbolos matemáticos, expresa las propiedades matemáticas, las ecuaciones matemáticas.

Por este registro, podemos presentar la definición de función cuadrática, con la regla de correspondencia:  $f(x)=ax^2+bx+c$ , siendo:  $a \neq 0$ .

R3: Registro Figural: este registro expresa en forma gráfica a los objetos matemáticos, como figuras geométricas.

R4: Registro Cartesiano: este registro expresa en un plano cartesiano a los objetos matemáticos, como gráficos de funciones.

En la siguiente tabla se presentan los cuatro tipos de registros de representación semiótica según Duval (1995):

### 1.16 La Actividad Matemática según la TRRS

Así mismo, según Duval (1995), la actividad matemática se realiza cuando se producen alguna de las dos transformaciones:

T1: Los Tratamientos: ocurren cuando la actividad matemática se produce sin cambiar de registro

semiótico. Es una transformación monoregistro. Por ejemplo, cuando se hace una actividad algebraica y se realiza totalmente en el registro simbólico. Para comprender la complejidad cognitiva de los tratamientos, debemos analizar por separado en que registros se llevan a cabo los tratamientos, en el registro discursivo o el registro gráfico.

T2: Las Conversiones: ocurren cuando la actividad matemática se produce con un cambio de registro semiótico. Se pueden realizar conversiones del registro literal al registro simbólico o en el sentido contrario; también se podría realizar una conversión del registro simbólico al registro figural o en el sentido contrario. Las dificultades producidas por la conversión en una actividad matemática, son observadas de acuerdo a los pares de registros que son intercambiados en esta transformación; tenemos el caso más conocido cuando ocurre una simple “traducción” de términos de un problema literal es convertido en una expresión algebraica, este es un caso que muchos estudiantes no logran realizar con éxito. Duval (2005) concluye que la conversión posee dos características: la primera señala que la conversión puede ser o no congruente, y la segunda hace referencia a que la conversión tiene una orientación o sentido, lo cual permite señalar al registro de partida como al registro de llegada.

### 1.17 Coordinación entre Principios de la EMR y la TRRS.

Hemos visto que cada Teoría de la Educación Matemática, sea la EMR, la TRRS u otras, tienen sus principios que sustentan cada teoría. Ahora

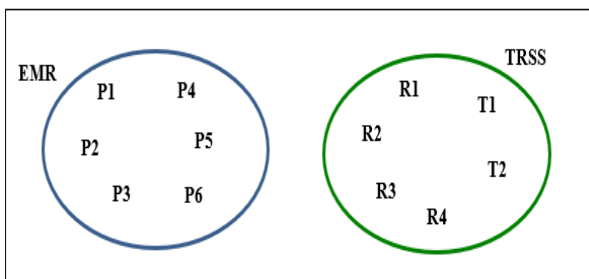
intentamos encontrar la coordinación, comparación, articulación o semejanza entre dichos principios y su posible “sinergia educativa” en bien del logro de los aprendizajes de las Matemáticas.

Según Prediger et al (2008), nos propone que, al comparar teorías, entre ellas se encuentran similitudes y diferencias fuertes, “las similitudes son puntos para vincular y las diferencias fuertes pueden hacer que se hagan visibles las fortalezas individuales de cada teoría” (p. 4).

La EMR presenta sus seis principios fundamentales y la TRRS presenta sus registros de representación semiótica y sus transformaciones entre registros semióticos, como se indica en la Figura 2 se muestra un esquema de los Principios de las Teorías de la EMR y TRRS.

**Figura 02**

*Principios de las Teorías EMR y TRRS*



*Nota. Elaboración propia*

Siendo:

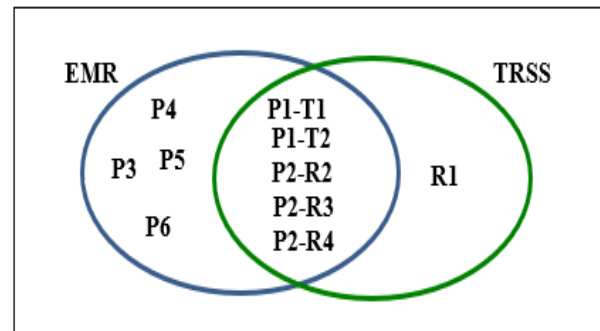
- P1: Principio de Actividad  
R1: Registro Literal
- P2: Principio de Realidad  
R2: Registro Simbólico
- P3: Principio de Niveles  
R3: Registro Figural

- P4: Principio de Entrelazamiento  
R4: Registro Cartesiano
- P5: Principio de Interactividad  
T1: Tratamiento
- P6: Principio de Orientación  
T2: Conversión

Luego en la Figura 03 se muestra un esquema de la Coordinación entre los Principios de las Teorías EMR y TRRS.

**Figura 03**

*Coordinación entre los Principios de las Teorías EMR y TRRS*



*Nota. Elaboración propia*

Siendo:

- P1: Principio de Actividad  
R1: Registro Literal
- P2: Principio de Realidad  
R2: Registro Simbólico
- P3: Principio de Niveles  
R3: Registro Figural
- P4: Principio de Entrelazamiento  
R4: Registro Cartesiano
- P5: Principio de Interactividad  
T1: Tratamiento

P6: Principio de Orientación

T2: Conversión

De ambos gráficos se obtienen cinco tipos de coordinaciones posibles:

CO1: el Principio de Actividad (EMR) y los Tratamientos (TRRS)

CO2: el Principio de Actividad (EMR) y las Conversiones (TRRS)

CO3: el Principio de Realidad (EMR) y los Registros Simbólicos (TRRS)

CO4: el Principio de Realidad (EMR) y los Registros Figurales (TRRS)

CO5: el Principio de Realidad (EMR) y los Registros Cartesianos (TRRS)

### 1.19 Razonamiento Cuantitativo

Crowther (1959) es reconocido como el primer investigador en utilizar el concepto “alfabetización numérica” que es equivalente al concepto de “razonamiento cuantitativo”, propuso la necesidad que la población estudiantil desarrollara un conjunto de habilidades y comunicación, incorporando la actividad matemática en diversas disciplinas del conocimiento humano. Para Crowther, la alfabetización numérica, resulta indispensable para que todo estudiante pueda desarrollar dos componentes fundamentales en su actividad de construir conocimientos: la comprensión del método científico y la capacidad de pensar cuantitativamente.

En el razonamiento cuantitativo, propuesto por Sons (1996) se proponen 5 dimensiones:

D1: Interpretación, de la información relevante para iniciar la resolución de problemas.

D2: Representación, de la información en forma literal, simbólica o figural.

D3: Cálculo, es el centro de la actividad matemática, se producen las transformaciones de la información para obtener soluciones sobre cuestiones propuestas.

D4: Análisis y Comunicación, de los resultados obtenidos en la actividad de cálculo, se puede producir una toma de decisiones, comparaciones, uso de relaciones de orden y otros para llegar a una conclusión.

En nuestra investigación, esperamos que a través de la coordinación de los principios de la EMR y la TRRS, se favorezca el logro de las dimensiones de este razonamiento cuantitativo, como la interpretación de los parámetros de la regla de correspondencia de la función cuadrática; la representación de la función cuadrática en los distintos registros semióticos, principalmente en el registro simbólico y el registro figural; que el alumno logre realizar los cálculos para la determinación del vértice de la parábola, así como las intersecciones con los ejes coordenados; y le permite en una situación contextualizada hacer un análisis para una toma de decisiones, que le permita comunicar de forma argumentada en los resultados del cálculo, la respuesta que muestre el logro del razonamiento cuantitativo en el aprendiz.

## MÉTODO

### 2.1 Tipo de Investigación

El tipo de investigación que realizaremos es de tipo aplicada, que es aquella que tiene como objetivo aplicar los conocimientos obtenidos una realidad o

práctica concreta como las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, para modificarla y transformarla para mejorarla hasta donde sea posible. En la Educación este tipo de investigación es relevante para toda la comunidad educativa que tiene un interés especial en mejorar la práctica de la enseñanza y aprendizaje de todas las materias del currículo educativo. Así mismo la información que obtenemos de la investigación aplicada es muy útil para incrementar el bagaje de conocimientos y teorías de investigación básica donde ambas, la investigación básica e investigación aplicada se complementan mutuamente para explicar el universo educativo en sus características estáticas y dinámicas inherentes a esta ciencia (Martínez, 2007). Esta práctica educativa esperamos se vea mejorada a través de la coordinación entre los principios de la EMR y de la TRRS en favor del logro los aprendizajes de Matemáticas.

La presente investigación se realiza en el enfoque cuantitativo. Según Navarro et al. (2017), “el enfoque cuantitativo permite aplicar pruebas estandarizadas (test) y cuestionarios obteniendo información numérica relevante para la investigación” (p. 21).

La investigación corresponde a un estudio correlacional, este tiene como finalidad conocer la relación o grado de asociación existente entre dos o más conceptos, categorías o variables en un contexto en particular. Estos estudios correlacionales, “al evaluar el grado de asociación entre dos o más variables que se sustentan en hipótesis sometidas a prueba”. (Hernández et al. 2010, p. 123).

La muestra de nuestra investigación se elige por el muestreo probabilístico, donde los sujetos se extraen de la población de estudio, se conoce la

probabilidad de selección de cada unidad elemental, aunque estas probabilidades, no necesariamente sean iguales. Este tipo de muestreo se realiza para proporcionar estimaciones válidas para la población a partir de una muestra seleccionada. Esto se interpreta que lo que se describe para la muestra también será válido para la población, con cierto grado de error. Se elige el muestreo aleatorio simple, donde los sujetos se selecciona a partir de la población con la misma probabilidad de ser elegidos. Este método se usa con más frecuencia cuando la población es pequeña. (MacMillan y Schumacher, 2005)

## 2.2 Instrumentos de Investigación

Los instrumentos son los documentos elaborados a partir de los indicadores, “su propósito es llevar a buen fin cada entrevista; [...] tiene que ser neutral, pero cordial y servicial” (Hernández et al, 2010, p. 266). En las instrucciones del cuestionario, debe indicarse el propósito general del estudio, las motivaciones y el tiempo general de respuesta, agradeciendo de antemano la colaboración. En nuestra investigación aplicaremos dos cuestionarios como instrumentos de investigación, el primero para recoger información sobre la variable V1 y el segundo sobre la variable V2.

## 2.3 Elaboración del Instrumento de Medición

- Se elabora el instrumento de medición con 10 ítems según la operacionalización de la variable.
- Se envía el instrumento con su rúbrica de evaluación para realizar la validez y confiabilidad del instrumento a cargo de los 3 jueces expertos.
- Se aplica el instrumento validado a los 19 sujetos de investigación determinados según el muestreo probabilístico. Esta aplicación se

realiza con la técnica de la encuesta, a través de un Formulario de Google con alternativas múltiples, cuyo link se envía en forma virtual por correo electrónico.

- Se decepcionan los resultados en forma virtual a través del mismo Formulario Google, creando un Excel con los resultados enviados.
- Los resultados obtenidos son procesados empleando el software estadístico SPSS v.21, para la obtención de los resultados estadísticos que serán analizados por el investigador, llegando a las conclusiones que se presentarán en adelante.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

### 3.1 Análisis de Resultados del Cuestionario

Los resultados del cuestionario son analizan en dos etapas, primero se le aplica la prueba de normalidad obteniéndose que no existe normalidad, luego se eligió una prueba no paramétrica. Luego de aplicar el SPSS se obtuvo los resultados de la Tabla 01:

**Tabla 01**

*Pruebas de Normalidad*

Pruebas de normalidad						
	Kolmogórov-Smirnov			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	Gl	Sig.
COORDINACIÓN de EMR y TRRS	,538	19	,000	,244	19	,000
LOGRO del RAZ. CUANTITATIVO	,518	19	,000	,365	19	,000

Conclusión: Como la significancia es  $0,000 < 0,05$ , entonces no existe normalidad.

### 3.2 Análisis de Resultados del Cuestionario: Prueba Chi-Cuadrado

En nuestro estudio, las variables son:

V1: La coordinación entre los principios de las Teorías de la Educación Matemática.

V2: Logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

Por su naturaleza, ambas variables son categóricas y como la distribución de datos no cumple con la distribución normal, se elige una prueba no paramétrica: Chi-Cuadrado.

Esta prueba Chi-Cuadrado se aplica a la Hipótesis General del estudio y a las Hipótesis Específicas.

#### Prueba de la Hipótesis General:

**H<sub>1</sub>:** Existe una relación significativa entre la coordinación entre los principios de las principales Teorías de la Educación Matemática y el logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

**H<sub>0</sub>:** No existe una relación significativa entre la coordinación entre los principios de las principales Teorías de la Educación

Matemática y el logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

**Tabla 02**

*Prueba de Chi-Cuadrado de la Hipótesis General*

Pruebas de chi-cuadrado			
	Valor	gl	Sig. Asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	19,000a	2	,000
Razón de verosimilitudes	7,835	2	,020
Asociación lineal por lineal	14,244	1	,000
N de casos válidos	19		

Nota. a. 5 casillas (83,3%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,05.

**Interpretación sobre la Hipótesis General:**

Si en la tabla de la Prueba de Chi-cuadrado para la Hipótesis General, el valor de Sig. Asimétrica es  $0,000 < 0,05$ , entonces rechazamos la hipótesis nula ( $H_0$ ) y aceptamos la hipótesis alternativa ( $H_1$ ), esto se interpreta que existe una relación

significativa entre la coordinación entre los principios de las principales Teorías de la Educación Matemática y el logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar con un nivel de confianza del 95%.

**Tabla 03**

*Tabla de contingencia entre la Coordinación de EMR-TRRS y el logro del Razonamiento Cuantitativo*

Tabla de contingencia COORDINACIÓN de EMR y TRRS * LOGRO del RAZ. CUANTITATIVO						
			LOGRO del RAZ. CUANTITATIVO			Total
			en inicio	en proceso	destacado	
COORDINACIÓN de EMR y TRRS	en proceso	Recuento	1	0	0	1
		Frecuencia esperada	,1	,1	,9	1,0
		% del total	5,3%	0,0%	0,0%	5,3%
	destacado	Recuento	0	1	17	18
		Frecuencia esperada	,9	,9	16,1	18,0
		% del total	0,0%	5,3%	89,5%	94,7%
Total	Recuento	1	1	17	19	
	Frecuencia esperada	1,0	1,0	17,0	19,0	
	% del total	5,3%	5,3%	89,5%	100,0%	

Interpretación sobre Relación entre la Coordinación de EMR-TRRS y el Logro del Razonamiento Cuantitativo:

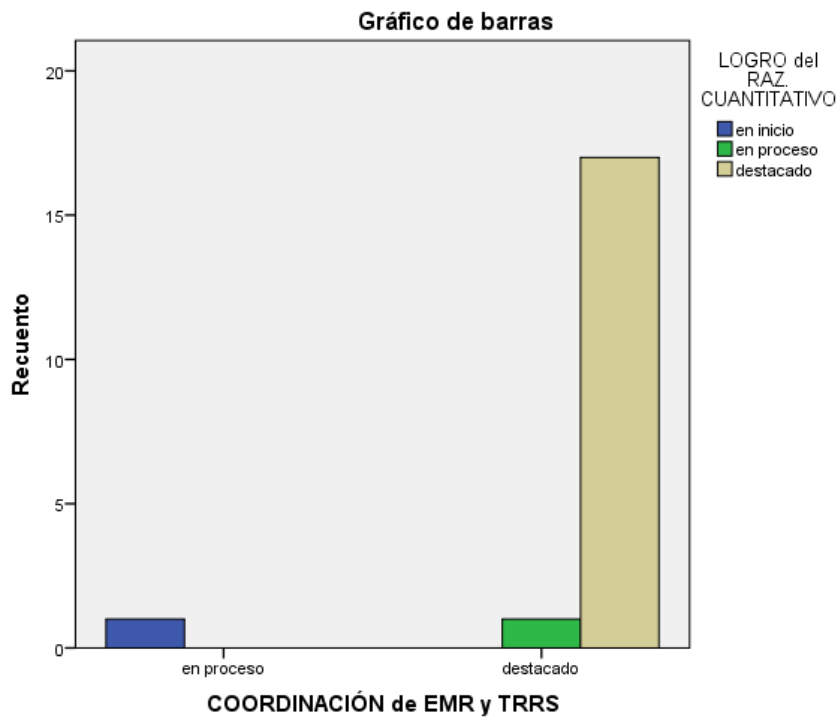
En la tabla anterior se observa que debido a la coordinación de la EMR-TRRS se logra que el 5,3% de los docentes evaluados según este

cuestionario se encuentra en un nivel de inicio, un 5,3% se encuentra en un nivel de proceso y un 89,5% se encuentra en un nivel destacado de la competencia. Estos resultados son presentados en forma gráfica mediante el gráfico de barras mostrado a continuación, donde se observa que 17

de los 19 docentes evaluados alcanzan el nivel destacado en la competencia.

**Figura 04**

*Distribución de los docentes evaluados según la Coordinación de EMR-TRRS y el Logro del Razonamiento Cuantitativo*



**CONCLUSIONES**

- De los resultados obtenidos de la Prueba de Chi-cuadrado se concluye que existe una relación significativa entre ambas variables de estudio. Esto comprueba que la coordinación de los principios de ambas teorías contribuye a la mejora de los aprendizajes de las Matemáticas. Esto da a conocer a la comunidad educativa que en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en el nivel escolar pueden aplicarse una matemática realista-semiótica, que parte de la coordinación de las teorías de Hans Freudenthal y Raymond Duval, donde las Matemáticas tienen una nueva forma de aprendizaje, disponen de modelos y registros, para el logro de una actividad matemática más

realista, más semiótica, y por esto se hace más significativa y más manipulable, para la disminución de las dificultades involucradas en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

- Los resultados obtenidos justifican la implementación de las teorías de la EMR y de la TRRS en diversas partes del mundo, mostradas en investigaciones anteriores, donde se pone atención en reconsiderar cómo los estudiantes aprenden matemáticas, proponer un nuevo currículo operativo de matemática en la escuela, así como la importancia de la orientación del maestro durante el proceso de matematización, tomando como guía la fenomenología didáctica de Freudenthal y los registros semióticos de Duval.



**RECOMENDACIONES**

- Los maestros ahora disponemos de teorías de la educación matemática como la EMR y la TRRS para aplicarlas en los diversos escenarios de enseñanza-aprendizaje creando nuevas estrategias de enseñanza, porque ya no podemos enseñar como nos enseñaron, y así lograr aprendizajes realistas y semióticos, para lograr las dimensiones del razonamiento cuantitativo.
- Los maestros pueden incorporar los modelos de la EMR para generar aprendizajes realistas, así como “manipular” los objetos matemáticos, abstractos por naturaleza, a través del uso los registros semióticos de Duval, que permitan los procesos de matematización de las diversas disciplinas del conocimiento humano.
- Los maestros de educación matemáticas pueden descubrir en la coordinación entre principios de las teorías de la educación matemáticas nuevas maneras de potenciar los aprendizajes de las matemáticas. Así como se recomienda que no sean maestros monorregistros según el enfoque de la TRRS, también se recomienda que no sean maestros que aplique una sola teoría de la educación matemática en su actividad docente, esto ante la diversidad creadas con diversos enfoques. Cada sesión de aprendizaje es un momento de investigación que requiere de marcos teóricos basados en las teorías de la educación matemática.

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- [1] Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [2] Chevallard, Y. (1998). *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Psicología cognitiva y educación. Recuperado en octubre, 2013 de: <https://www.google.com.pe/#q=teor%C3%ADa+de+la+transposici%C3%B3n+did%C3%A1ctica+de+yves+chevallard>
- [3] Crowther, G. (1959). 15 to 18: A report of the Central Advisory Council for Education. Vol1. <http://www.educationengland.org.uk/document/s/crowther1959-1.html>.
- [4] Drijvers, P. (2020a). Instrumentación corporeizada: combina diferentes puntos de vista sobre el uso de la tecnología digital en la educación matemática. En *Actas del Décimo Congreso Internacional de Educación Matemática* (pp. 20-44). PUCP.
- [5] Drijvers, P. (2020b). Una visión realista de la educación matemática realista (EMR). Conferencia en el Congreso Internacional de Educación Matemática, 19 de febrero de 2020. Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP. Lima, Perú.
- [6] Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Derek Holton, et al. (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study*, pp. 273–280. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [7] Duval, R. (1995). *Semiosis y pensamiento humano*. Berna, Peter Lang.
- [8] Duval, R. (2005). Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. En: Alcântara S. (2005) *Aprendizagem em Matemática*. Registros de Representação Semiótica. Papyrus editora. Sao Paolo. Brasil.
- [9] Duval, R. (2011). Ideas claves para el análisis cognitivo de los problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. Conferencia del Comité Interamericano de Educación Matemática. Universidad Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.
- [10] Font, V. (2013). Coordinación de Teorías en Educación Matemática. Conferencia en el VII

- Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, VII CIBEM. Montevideo, Uruguay.
- [11] Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, the Netherlands. Reidel Publishing Company.
- [12] Gallart, C. (2016). *La modelización como herramienta de evaluación competencial*. Tesis doctoral publicada. Universidad Politécnica de Valencia. España.
- [13] Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006) Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1): 117-150.
- [14] Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación*. 6ta. Edición. Mc Graw Hill Educación.
- [15] Heuvel-Panhuizen, M. (2019). *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics*. Utrecht University Utrecht, the Netherlands. Springer Nature Switzerland AG. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1>
- [16] Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas (2021, 30 de agosto). *Líneas de Investigación*. Pontificia Universidad Católica del Perú. <https://irem.pucp.edu.pe/110/linea-3-curriculo-y-formacion-de-profesores>
- [17] Macías, J. (2016). *Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos*. Tesis de doctorado. Universidad Complutense de Madrid. España.
- [18] MacMillan, J. & Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa: Una Introducción Conceptual*. 5ta. Edición. Pearson Educación, ISBN: 978-84-832-2687-2. 664p.
- [19] Martínez, R.A. (2007). *La investigación en la práctica educativa: Guía metodológica de investigación para el diagnóstico y evaluación en los centros docentes*. Centro de Investigación y Documentación Educativa del Ministerio de Educación y Ciencia. España.
- [20] Ministerio de Educación, Minedu (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Perú.
- [21] National Council of Teachers of Mathematics, NCTM (2020). *Standards for the Preparation of Secondary Mathematics Teachers*. United States. [www.nctm.org](http://www.nctm.org)
- [22] Navarro, E., Jiménez, E., Rappoport, S. y Thoilliez, B. (2017). *Fundamentos de la Investigación y de la Innovación educativa*. UNIR Editorial. Universidad Internacional de la Rioja. España.
- [23] Prediger, S.; Bikner, A. y Arzarello, F. (2008). *Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework*. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 165-178.
- [24] Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Arman Colin. An English version may be retrieved from [http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/default.asp?Act\\_group=1](http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/default.asp?Act_group=1)
- [25] Salgado, M. (2015). *La práctica docente en educación infantil desde el enfoque de la Educación Matemática Realista y los procesos matemáticos*. Tesis doctoral. Universidade de Santiago de Compostela. España.
- [26] Sons, L. R. (1996). *Quantitative reasoning for college graduates: A complement to the Standards*. <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/quantitative-literacy/quantitative-reasoning-college-graduates>
- [27] Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas project*. Dordrecht, the Netherlands: D. Reidel Publishing Company.
- [28] Universidad Nacional Federico Villarreal (2021, 29 de agosto). *Líneas de Investigación de la UNFV. Propuesta definitiva de la Comisión de Trabajo*. <http://www.unfv.edu.pe/vrin/lineas-de-investigacion>.