



La enseñanza de los números complejos desde la teoría de situaciones didácticas y los registros de representación semiótica² - Caso UNE Enrique Guzmán y Valle

The teaching of complex numbers from the theory of didactic situations and the registers of semiotic representation² - Case UNE Enrique Guzmán y Valle

 **Gamaniel Domingo Gonzales Salvador**
Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle
ggonzales@une.edu.pe

 **Narcio Felimón Vilcapoma Lara**
Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle
nvilcapoma@une.edu.pe

 **Nelson Smith Huanca Torres**
Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle
nhuanca@une.edu.pe

RESUMEN

El estudio de los números complejos es muy importante en la formación de docentes en la especialidad de matemática sin embargo su proceso de enseñanza en la UNE no es adecuada, y sobre todo no están considerando en el silabo de matemática II, dentro del desarrollo es puesto que se aborda principalmente de manera numérica y algebraica dejando de lado su representación geométrica, lo que genera limitaciones y obstáculos en su comprensión, tal como muestra el estudio realizado por Camacho (2013), dichos obstáculos son principalmente epistemológicos, los que a su vez son de tipo algebraico, analítico, geométrico y formal (Camarena, 2003, como se citó en Ndjatchi, 2019).

Palabras clave: Números complejos, teoría, didáctica, semiótica.

ABSTRACT

The study of complex numbers is very important in the training of teachers in the specialty of mathematics, however, its teaching process in the UNE is not adequate, and above all they are not considering the syllabus of mathematics II, within the development it is put which is mainly addressed in a numerical and algebraic way, leaving aside its geometric representation, which generates limitations and obstacles in its understanding, as shown by the study carried out by Camacho (2013), these obstacles are mainly epistemological, which in turn are of an algebraic, analytical, geometric and formal type (Camarena, 2003, cited in (Ndjatchi, 2019).

Keywords: Complex numbers, theory, didactics, semiotics.

INTRODUCCIÓN

La matemática es una disciplina fundamental y necesaria en la vida humana, la mejora de la calidad de vida de las personas y el desarrollo de la ciencia en general, se deben a las aplicaciones y uso de la matemática en todos los campos del conocimiento humano; por la cual su aprendizaje y conocimiento deben ser realizados óptimamente en las personas desde muy temprana edad.

Las instituciones educativas en educación superior tienen en sus planes de estudios cursos propedéuticos y de especialidad en matemática, tal es el caso de que en el plan de estudios de la Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle (EGV); así como en la Facultad de Ciencias (Res. No.518-2019-D-FAC) una asignatura de formación general es matemática II, cuyos contenidos son: geometría analítica, vectores, matrices y sistemas de ecuaciones y números complejos.

El estudio de los números complejos es de suma importancia en diversas instituciones educativas formadora de docentes de matemática, ingenieros, físicos, electrónicos y en ciencias de la computación; motivo por la cual su aprendizaje es de importancia capital, lo cual no reside únicamente en su utilidad para resolver problemas algebraicos o de tipo práctico.

La enseñanza aprendizaje de los números complejos en la UNE en general no son muy adecuadas, puesto que los estudiantes no tienen una idea clara y precisa de este objeto matemático; es más para su desarrollo inicial resuelven ecuaciones de segundo grado con coeficientes reales y se dan con la sorpresa de que sus soluciones no siempre son números reales; es decir solo lo realizan algebraicamente, sin considerar otros registros como el geométrico y trigonométrico y más aún cuando realizan operaciones con números complejos e intentan demostrar sus propiedades tienen serias dificultades.

Para abordar la problemática existente en la enseñanza aprendizaje de los números complejos y optimizarla se usó la teoría de situaciones didácticas de Brousseau y siguiendo la metodología de la ingeniería didáctica, se diseñó actividades de aprendizaje a partir de situaciones o problemas de contexto real, con la cual se construyó el objeto de estudio, así mismo mediante las sesiones de aprendizaje los estudiantes representaron un número complejo como un par ordenado de números reales y también en su forma binómica.

El objetivo de las sesiones 2,3 y 4 fueron de que los estudiantes representen gráficamente un número complejo en el plano complejo, estudien los ángulos que forman un número complejo con el semieje real

positivo, realicen las operaciones de la adición, sustracción y multiplicación; así como distingan algunas propiedades de dichas operaciones, también definan el módulo de un número complejo y enuncien sus propiedades.

Finalmente, después de la aplicación de las sesiones de aprendizaje, se observó al analizar sus hallazgos y conclusiones, que los estudiantes lograron en su mayoría desarrollar los aprendizajes esperados, lo que da validez a la metodología propuesta en el siguiente trabajo de investigación.

Marco Teórico

Antecedentes

Bustamante (2000) en su tesis de maestría (PUCP): “Presentación de los números complejos. Enfoques e interpretaciones”, elabora un módulo auto instructivo para docentes de matemática, asumiendo los postulados del constructivismo y el método heurístico. Entre sus conclusiones señala que en la enseñanza de los números complejos es importante considerar las referencias históricas, que se puede resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ siguiendo un proceso intuitivo de visualización geométrica sin necesidad de recurrir al número imaginario $\sqrt{-1}$, también afirma que es más conveniente llegar a una representación matricial de los números complejos a partir de la matriz de rotación en un espacio vectorial.

Pardo y Gómez (2007) realizan un análisis sobre la enseñanza y aprendizaje de los números complejos en el nivel universitario bajo la línea de investigación de los Modelos Teóricos Locales (MTL) y señalan que las dificultades e inconsistencias que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los números complejos son las mismas que se han presentado a lo largo de la

historia, y que por lo contrario se han reproducido y agudizado.

Camacho (2013) en el estudio sobre las *Dificultades en la concepción de los números complejos en el ámbito escolar*, aplicó un cuestionario y realizó el análisis desde el marco teórico de las metáforas conceptuales.

Como resultado informó que las concepciones que tienen dichos estudiantes sobre los números complejos son limitadas y poco coherentes con los contenidos abordados en clase y que dicho conocimiento está basado en la noción del número i y propuso tomar en cuenta la historia de la matemática como elemento enriquecedor de las concepciones que tienen los estudiantes.

Metodología

Metodología de la investigación

El presente estudio se realizará siguiendo el proceso metodológico de la ingeniería didáctica, ya que ésta es una metodología propia para las realizaciones didácticas en el aula, específicamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática (Pochulu & Rodríguez, 2015).

Enfoque de la investigación

La ingeniería didáctica tiene un enfoque cualitativo, pues se centra en la comprensión del proceso de enseñanza-aprendizaje de un objeto matemático específico en un aula determinada, desde la perspectiva de un grupo de estudiantes y considerando el contexto particular (Hernández-Sampieri & Mendoza -Torres, 2018).

Método

La ingeniería didáctica es una metodología de investigación que tiene cuatro fases; se inicia con

los análisis preliminares, que comprende el análisis epistemológico, didáctico, cognitivo, de investigaciones previas y del campo de restricciones. Luego se realiza el análisis a priori, que corresponde al diseño de la situación didáctica, la fase experimental y el análisis a posteriori (Artigue, 2020).

Tipo de investigación

Una ingeniería didáctica como investigación de realizaciones didácticas en el aula, corresponde a un estudio de caso, pues consiste en el estudio de la particularidad y de la complejidad del caso del aprendizaje de los números complejos en un aula de segundo ciclo de la UNE.

Diseño de investigación

La ingeniería didáctica se sustenta dentro del marco de enfoque epistemológico experimental, o más precisamente cuasi-experimental consiste en la escogencia de los grupos, en los que se prueba una variable, sin ningún tipo de selección aleatoria o proceso de pre-selección.

Por ejemplo, para realizar un experimento educacional, una clase puede ser arbitrariamente dividida por orden alfabético o por disposición de los asientos. La división es a menudo conveniente y, sobre todo en una situación educacional, se genera la menor interrupción posible.

Después de esta selección, el **experimento** procede de manera muy similar a cualquier otro, con una variable que se compara entre grupos diferentes o durante un período de tiempo.

Aplicación de modelo matemático

Los números complejos tienen una gran importancia en muchas áreas, ya que pueden ser aplicados en situaciones de la vida real, esto incluye

a campos de la ingeniería, especialmente en la electricidad.

Obviamente por su origen, los números complejos también son usados para encontrar soluciones a ecuaciones cuadráticas. Cuando tenemos ecuaciones que no cruzan al eje x , sus soluciones pueden ser representadas con números complejos.

Quizás la aplicación más importante de los números complejos es en la electricidad, sobre todo en la electrónica de corriente alterna (AC). Este tipo de corriente produce una onda sinusoidal debido a que cambia entre positivo y negativo.

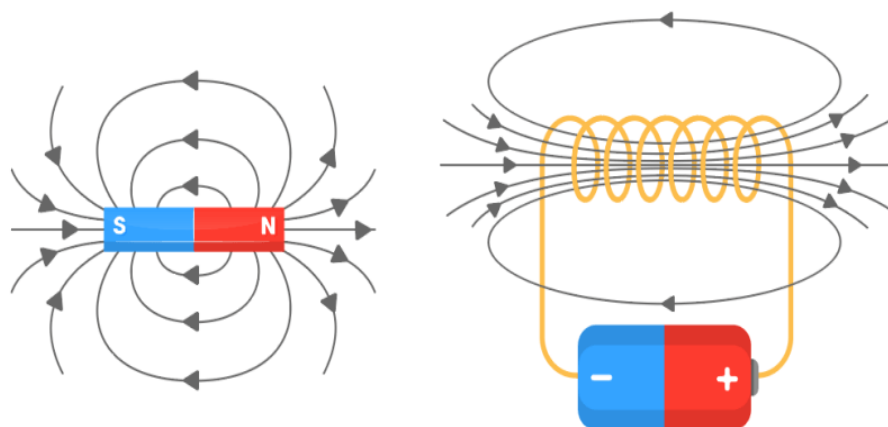
Realizar calculaciones con la corriente alterna resultaría extremadamente complicado sin el uso de números complejos debido a que las ondas sinusoidales no encajan apropiadamente. Sin embargo, con la ayuda de los números complejos, el cálculo de corrientes alternas se vuelve más simple.

El procesamiento de señales es otra aplicación importante de los números complejos. El procesamiento de señales es usado en la tecnología de teléfonos móviles, en tecnologías inalámbricas, en radares y otras aplicaciones de transmisión de señales.

En resumen, los números complejos particularmente usados para simplificar los cálculos de proceso que involucran ondas seno o coseno.

Figura 1

Comportamientos y movimientos relacionados con cargas eléctricas



Los números complejos están presentes en el diseño aerodinámico de coches y aviones y en el diseño hidrodinámico de barcos que a su vez permite una reducción de las fricciones y una reducción del consumo de carburante.

Los números imaginarios forman parte de los números llamados complejos que se escriben de la siguiente forma: $a + ib$, siendo a y b números reales. En esta formulación, ib es lo que se llama la parte imaginaria del número complejo. La definición poco intuitiva pero genial de i es que $i^2 = -1$.

Ejemplo.

En la mecánica cuántica, para la cual la ecuación cuántica de Schrodinger de 1925 es una ecuación fundamental que permite describir la evolución temporal de una partícula no relativista. En resumen, los números complejos se utilizan para explicar el comportamiento de la materia a nivel cuántico. Esto significa que la mecánica cuántica permite describir los fenómenos a nivel atómico como la dualidad onda-corpúsculo y la computación cuántica que rige los ordenadores cuánticos.

A manera de comentario sobre la utilización de los números complejos en el estudio de un tema con el que no nos topamos todos los días pero que

llevamos en nosotros el origen del universo. Según la teoría del Bin Bang (o gran explosión). En ese modelo. Si se extrapolan las leyes de la física hacia el origen del universo. Estaría aproximadamente a 13 800 millones de años (que sería la edad del universo)

Los números complejos se utilizan constantemente en la ingeniería eléctrica al momento de analizar circuitos. Por ejemplo, cuando una fuente de tensión es alterna. Se puede utilizar la fórmula de Euler. (para números complejos)

Este recibe el nombre de FASOR.

El voltaje aplicado es la parte real del número complejo, pero es mucho más conveniente trabajar con números complejos que con senos y cosenos pues las operaciones derivación e integración (las cuales se ocupan de encontrar la velocidad, el flujo) se simplifican considerablemente.

AERONÁUTICA

Gracias a las transformaciones de Joukowsky, se puede convertir una circunferencia unitaria en el perfil de un ala del avión.

FASOR

Un fasor es una representación gráfica de un número complejo que se utiliza para representar una oscilación.

ESTUDIOS EN LA FISICA

Se usan en ingeniería electrónica y en otros campos para una descripción adecuada de las señales periódicas variables, cuando representamos una corriente o un voltaje de corriente alterna. Explicar dicho movimiento retrogrado es sencillo usando números complejos ya que la forma exponencial permite parametrizar curvas sobre el plano de una manera muy fácil.

MOVIMIENTO PLANETARIO

Los planetas vistos desde la tierra, siguen trayectorias no uniformes. si observamos la posición de un planeta durante un año, parece como si el planeta, a veces avanzara y retrocediera por el firmamento.

TRANSFORMACIONES DE JOUKOWSKY

La transformada de Joukowski transforma cualquier número complejo ζ de la siguiente forma:

$$z = x + iy = \zeta + 1/\zeta, \text{ donde:}$$

$$x = x(x^2 + \eta^2 + 1) / (x^2 + \eta^2)$$

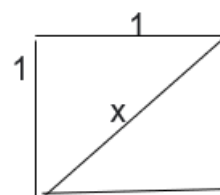
$$x = \eta(x^2 + \eta^2 - 1) / (x^2 + \eta^2)$$

Como conclusión que inicialmente se consideró como un truco matemático para resolver ecuaciones en el siglo XVI, y que se llamó “imaginario” por su extravagancia, está siendo utilizado en nuestros días para resolver problemas de nuestra vida cotidiana.

La matemática está centrada en los números complejos contribuiría el avance de la geometría algebraica y la teoría de los sistemas dinámicos. Estos números tienen una larga historia que vinieron desde su nacimiento en el siglo XIX. Los números

no son tan complejos como podríamos creerlo. Se les llama primero los números imposibles y tardaría la llamada imaginaria, es cierto necesitamos un poco de imaginación, hoy en día estos números han invadido las ciencias y dejaron de ser misteriosos, en particular gracias en ello podemos construir los fractales. Dinámica del campo, en las películas animadas de matemática. R. Argand. LES QUANTILES IMAGINAIRES. PARIS. Los módulos se multiplican y los argumentos se suman.

Pues así: $x^2 = 2$.



No hay ningún número racional con estas características. $x \notin \mathbb{Q}$

*El teorema fundamental de álgebra, en álgebra superior, geometría, análisis matemático y en las funciones de variable compleja, es un teorema en el que se indica que **todo polinomio que tenga un grado mayor a cero posee una raíz.***

Bases teóricas

Los números complejos.

Se llama número complejo a todo par ordenado de números reales; es decir, $\sqrt{-1}$

$z = (a, b)$ es un número complejo, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Observaciones

- Dado el número complejo $z = (a, b)$, a es la parte real y b la parte imaginaria; es decir, $a = \text{Re}(z)$ y $b = \text{Im}(z)$.
- El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$), es el conjunto de todos los pares ordenados de

números reales; es decir, $\mathbb{C} \cong \frac{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}{\approx} =$

$$\{ (a, b); a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \}$$

- c. Un número complejo se denomina real si su parte imaginaria es cero, es decir, $z = (a, 0)$ es un número complejo real.
- d. Un número complejo se denomina imaginario, si su parte real es igual a cero, que se denota por $z = (0, b)$.

Operaciones en el conjunto de los números complejos

- a. *a) Adición de números complejos.*

Dados los números complejos $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$; entonces la suma de dichos números, se define como: $z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

- b. *b) Multiplicación de números complejos.*

Dados los números complejos $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$; entonces el producto de dichos números, se define como: $z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$

Forma binómica de un número complejo

Dado el número complejo $z = (a, b)$, entonces su expresión binómica está dada por, $z = a + bi$.

Operaciones con números complejos en forma binómica

- a) *Adición y sustracción de números complejos.*

Para sumar o restar números complejos en su forma binómica, se suman o restan sus partes reales y sus partes imaginarias respectivamente; es decir, si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$; entonces, $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ y $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$.

- b) *Multiplicación de números complejos.*

Para multiplicar dos números complejos en su forma binómica, se multiplican como polinomios; es decir, dados los complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$; entonces:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i.$$

Conjugado de un número complejo

Sea el número complejo $z = a + bi$; el complejo conjugado de dicho número se define como $\bar{z} = a - bi$. (se cambia de signo a la parte imaginaria)

Propiedades de los complejos conjugados

Rojo (2001) plantea:

P1. La suma de un número complejo con su conjugado es el doble de la parte real.

Sea $Z = a + bi$ y $\bar{Z} = a - bi$, entonces $Z + \bar{Z} = 2a$

P2. La diferencia de un número complejo con su conjugado, es el opuesto del doble de la parte imaginaria.

Sea $Z = a + bi$ y $\bar{Z} = a - bi$, entonces $Z - \bar{Z} = 2bi$

P3. El producto de un número complejo con su conjugado, es un número real positivo.

Sea $Z = a + bi$ y $\bar{Z} = a - bi$, entonces $Z \cdot \bar{Z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}$

P4. El conjugado de la suma de dos complejos es igual a la suma de los conjugados de dichos números complejos.

Sea los números complejos Z y W ; $\overline{Z + W} = \bar{Z} + \bar{W}$

P5. El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los conjugados de dichos números.

Sea los números complejos Z y W ; $\overline{Z \cdot W} = \bar{Z} \cdot \bar{W}$

Módulo de un número complejo

Dado el número complejo $z = a + bi$, el módulo (o norma) de dicho número se denota por $|z|$ y se define como: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propiedades del módulo de un número complejo.

P1. El módulo de un número complejo es mayor o igual que cero y es cero si se trata del complejo nulo.

P2. El módulo del producto de números complejos, es igual al producto de los módulos.

P3. El módulo de la suma de dos números complejos, es menor o igual que la suma de los módulos de dichos números.

Forma polar o trigonométrica de un número complejo.

Dado el número complejo $z = x + yi$, entonces su representación polar está dada por:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Proposición:

Dados los números complejos

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ y}$$

$$w = |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ entonces se cumple:}$$

$$\text{i. } z \cdot w = |z \cdot w|(\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)). \text{ (Chávez, 1993)}$$

$$\text{ii. } \frac{z}{w} = \left| \frac{z}{w} \right| [\cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi)].$$

Potenciación de un número complejo

Dado el número complejo

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta), \text{ entonces se define:}$$

$$z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)). \text{ (Rojo, 2001)}$$

Observación.

Chávez (1993) menciona:

Si $z = (\cos \theta + i \sin \theta)$ cuyo módulo es 1, entonces, se tiene:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)), \forall n \in \mathbb{Z}. \text{ (Fórmula de De Moivre)}$$

La teoría de las situaciones didácticas

Brousseau a través de la *teoría de las situaciones didácticas* plantea un modelo centrado en la producción de los conocimientos matemáticos por los estudiantes, entendiendo que producir conocimientos significa establecer, transformar y reorganizar relaciones, y validarlos según las normas y los procedimientos aceptados por la comunidad matemática (Sadovsky, s.f.). Asimismo, postula que para todo conocimiento matemático se puede plantear una “situación fundamental” de manera que frente a ella emerja dicho conocimiento como la estrategia óptima. Es tarea del docente seleccionar dicha situación y devolver al estudiante la responsabilidad de la construcción de su propio aprendizaje interactuando con la situación sin su intervención, llamadas por eso a-didácticas.

Teoría de registros de representación semiótica

La teoría de registros de representación semiótica de Duval señala que el uso de los sistemas de representación semiótica son la única forma de acceder a los objetos matemáticos; además que cada registro de representación es cognitivamente parcial, por lo que, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de cualquier objeto matemático se deben coordinar diferentes registros (Castro et al., 2017).

Semiosis y noesis

En la teoría de registros de representación semiótica, se denomina *semiosis* a la actividad de producción de una representación; y *noesis* a la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos.

Actividades cognitivas relacionadas a la semiosis

En todo registro de representación hay tres actividades cognitivas relacionadas a la semiosis, la representación identificable, relacionada con la expresión de una representación mental, el tratamiento que es una transformación dentro del mismo registro y la conversión que es una transformación de un registro a otro (Oviedo & Kanashiro, 2012).

Definición de términos básicos

- a. *Número complejo*. - Un número complejo es un par ordenado de números reales.
- b. *Situaciones a-didácticas*. - Son situaciones de aprendizaje sin la intervención del docente.
- c. *Registros de representación semiótica*. - Son las distintas formas de expresar los objetos matemáticos por medio de signos.

CONCLUSIONES

A partir del análisis de los resultados obtenidos, podemos concluir que:

- La Didáctica es adecuada para la enseñanza de los números complejos y de la matemática en general.
- Existe una relación directa en las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de números complejos con las representaciones algebraicas y geométricas.
- Un gran porcentaje de los estudiantes de matemática que interactuaron con las sesiones de

aprendizaje lograron satisfactoriamente interiorizar el concepto de los números complejos, sus propiedades y aplicaciones en la solución de diversos problemas.

Desde los datos teóricos y empíricos que brindan los resultados de la investigación es posible concluir que para alcanzar una comprensión profunda del SNC es necesario conocer y transitar articuladamente por tres modos de pensar el sistema numérico: SG-SNC, AA-SNC y AE-SNC.

Cada uno de estos modos brinda formas de ver y entender el sistema numérico, pero su coordinación y tránsito serán los que permitan a los aprendices acceder a un pensamiento más versátil que les conduzca a diferentes significados del objeto y por tanto a su comprensión cabal.

Considerando esta premisa al analizar la comprensión del SNC en estudiantes escolares y universitarios chilenos, se concluye que éstos (1) en su mayoría, tienen una comprensión fragmentada del SNC debido principalmente a que privilegian y emplean el modo AA-SNC en la resolución de diferentes actividades, careciendo de tránsitos hacia y desde los modos SG-SNC y AE-SNC; y, al mismo tiempo y motivado por lo anterior, (2) entienden a los números complejos como un conjunto y no como un sistema numérico. En particular, es posible concluir para el caso de los estudiantes del nivel escolar, que éstos resuelven varias de las actividades desde los modos de pensar el sistema de los números reales y no desde los modos de pensar el SNC, dando cuenta de un sesgo de los números reales sobre los números complejos.

Por ejemplo, ideas arraigadas desde los números reales, tal como insistir en que un número al cuadrado (o potencia par) es siempre positivo o en negar la raíz cuadrada de un número negativo, se

manifiestan en el contexto de actividades que involucran al SNC.

Por su parte, en el caso de los estudiantes universitarios -futuros profesores de matemática y futuros licenciados en matemática-, éstos no alcanzan completamente los modos SG-SNC y AE-SNC. Esto permite argumentar la necesidad de un trabajo enfocado en las conexiones entre los modos de pensar el SNC, ya que se evidencian elementos que les permiten situarse en los modos, tales como estructura algebraica y de orden del sistema numérico, operaciones y transformaciones en el plano complejo.

En síntesis, se concluye la necesidad de continuar potenciando el trabajo en los modos de pensar SG-SNC y AE-SNC, en diálogo con otros referentes teóricos, así como también en el tránsito entre los modos de pensamiento descritos en este trabajo.

En particular, los modos de pensamiento y articuladores validados en este estudio aportan conocimiento para el diseño de situaciones de aprendizaje que promuevan la comprensión profunda del SNC.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Al hacer un análisis de los hallazgos encontrados, después de interactuar con la **sesión No. 1 titulado verdades complejas, podemos informar lo siguiente:**

Identifican y representan algebraicamente la unidad imaginaria, reconocen la parte real e imaginaria de un número complejo, inicialmente no se observa la definición de un número complejo, así mismo no enuncian las propiedades del número imaginario, no se observa que representan un número complejo en el plano complejo, pero explica e identifica un número complejo algebraicamente; finalmente no

se observa la representación de un número complejo en su forma general como un par ordenado ni en su forma binómica, pero si lo hacen de manera particular.

Al hacer un análisis de los hallazgos encontrados, después de interactuar con la **sesión No. 2. titulado relacionando números complejos, podemos informar lo siguiente:** Los estudiantes a partir del gráfico propuesto, identifican el opuesto y el conjugado de un número complejo, caracterizan los números complejos y lo representan usando un lenguaje algebraico, calculan el módulo de un número complejo, afirman que el módulo de un número complejo es igual al módulo de su opuesto y también igual al módulo de su conjugado, calculan el ángulo formado por un número complejo y el semieje real positivo, calculan el ángulo formado por el opuesto de un número complejo y el semieje real positivo, calculan el ángulo formado por el conjugado de un número complejo y el semieje real positivo, no se observa la relación de los ángulos que forman un número complejo, su opuesto y su conjugado, calculan el módulo de un número complejo, de su opuesto y de su conjugado; pero no se observa la comparación entre dichos módulos, los estudiantes formalizan y argumentan la relación que existe entre un número complejo, su opuesto; así como los ángulos que forman, expresan de manera general la relación existente entre un número complejo, su conjugado; así como los ángulos que forman, se observa que expresan algebraicamente de manera general el módulo de un número complejo. Al hacer un análisis de los hallazgos encontrados, después de interactuar con la **sesión No. 3 titulado adición y sustracción de números complejos, podemos informar lo siguiente:** A partir de la representación gráfica dada, deducen la suma de dos números complejos expresados como

pares ordenados, pero usando la representación binómica en forma particular, así mismo concluyen que para sumar dos números complejos, se suman las partes reales y las partes imaginarias, ahora a partir de los ejemplos propuestos los estudiantes deducen como se halla la diferencia de dos números complejos y sugieren cómo se resta números complejos de manera general, también los alumnos de manera parcial expresan la suma de dos números complejos y enuncian sus propiedades y representan gráficamente, cabe mencionar también que definen de manera general la diferencia de dos números complejos, como la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo.

Finalmente, a partir de la actividad propuesta los estudiantes justifican la importancia de las operaciones de adición y sustracción de números complejos y sus propiedades. **l** hacer un análisis de los hallazgos encontrados, después de interactuar con la **sesión No. 4 titulado multiplicación de números complejos, podemos informar lo siguiente:** Dados dos números complejos en su forma binómica, para hallar su producto los estudiantes representan como pares ordenados, los multiplica y el resultado lo expresan en forma de par ordenado, así mismo representan gráficamente en el plano complejo dos números complejos y también su producto, también hallan los ángulos que forma un número complejo con el semieje real positivo, pero no se observa la comparación.

Se observa también que hallan el ángulo que forma el producto de dos complejos con en semieje real positivo y lo representa gráficamente, de la misma forma hallan y comparan los módulos de dos números complejos y de su producto, también realizan el producto de dos números complejos; pero no definen en forma general, no se evidencia la

relación entre los ángulos y sus módulos respectivos de dos números complejos, con su producto, no indican las propiedades del producto de dos números complejos.

REFERENCIAS

1. Artigue, M. (2020). Metodologías de investigación en didáctica de la matemática. V Simposio Internacional de Matemática Educativa. Costa Rica: CIMPA y SEDUMAT.
2. Bustamante, L. (2000). Presentación de los números complejos. Enfoques e interpretaciones. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
3. Camacho, T. G. (2013). Dificultades en la concepción de los números complejos en el ámbito escolar. México D.F.: Centro de estudios avanzados del IPN.
4. Castro, M. G., González, M., Flores, S., & Ramírez, O. (2017). Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte I. Redalyc.org, Vol. 5. Núm. 13.
5. Chávez, C. (1993). Notas de álgebra. Lima: San Marcos.
6. Hernández-Sampieri, R., & Mendoza Torres, C. P. (2018). Metodología de la investigación. México: McGraw-Hill interamericana editores.
7. Ndjatchi, M. (2019). Conocimientos previos de números complejos en ingeniería. Redalyc.org, Vol. 30, N° 58.
8. Oviedo, L., & Kanashiro, A. (2012). Los registros semióticos de representación. Revista Aula universitaria 13., 29-36.
9. Pardo, T., & Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario. Revista de invetigación en didáctica de las matemáticas., 3-15.
10. Pochulu, M., & Rodríguez, M. (2015). Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Buenos Aires: Universitaria Villa María.
11. Rojo, A. (2001). Álgebra I. Buenos Aires: El Ateneo.
12. Sadovsky, P. (s.f.). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática.